

Spis treści

Wstęp	6
1. Podzielność i algorytm Euklidesa	7
1.1. Podzielność	7
1.2. Algorytm Euklidesa	13
2. Liczby pierwsze	20
3. Kongruencje	25
3.1. Własności	25
3.2. Klasyczne twierdzenia	29
4. Równania diofantyczne	35
4.1. Równania liniowe z dwiema niewiadomymi	35
4.2. Równania liniowe z n niewiadomymi	38
4.3. Równania stopnia drugiego	41
4.4. Równania rozmaite	45
5. Rozwiązywanie kongruencji	53
5.1. Kongruencje liniowe	53
5.2. Kongruencje kwadratowe i symbol Legendre'a	55
5.3. Algebraiczne własności układów reszt	65
5.4. Kongruencje rozmaite	72
6. Liczby pierwsze – ciąg dalszy	75
6.1. Wzory i algorytmy	75
6.2. Informacje i hipotezy	83
7. Funkcje arytmetyczne	91
7.1. Podstawowe funkcje arytmetyczne	91
7.2. Liczby doskonałe, liczby zaprzyjaźnione i inne	103
7.3. Własności algebraiczne funkcji arytmetycznych	108
7.4. Własności analityczne funkcji arytmetycznych	116
7.5. Własności analityczne funkcji $\pi(x)$	125
Bibliografia	132
Skorowidz	133
Skorowidz Mathematica	135

Wstęp

W 2006 roku w Wydawnictwie Naukowym PWN został wydany podręcznik „Elementarna teoria liczb” [ETL1]. Książka ta okazała się przydatna we wprowadzaniu podstawowych pojęć i twierdzeń teorii liczb zarówno na poziomie szkolnym, jak i na poziomie akademickim. Wielokrotnie prowadziłem zajęcia, korzystając z niej. W czasie tych zajęć starałem się wpleść wątki technologiczne, używając przede wszystkim programu Mathematica. Program ten, bez wątpienia gwiazda wśród programów tego typu, jest przyjazny dla użytkownika i nawet osoby nieznające zbyt dobrze tego programu mogą z jego pomocą rozwiązywać trudne zadania z teorii liczb.

Niniejszą książkę można więc uważać do pewnego stopnia za suplement do [ETL2], znajdziemy w niej definicje, twierdzenia (bez dowodów) z [ETL2] ilustrowane „technologicznie” i przede wszystkim zadania, przy rozwiązywaniu których korzysta się z programu Mathematica. Metoda rozwiązywania takich zadań polecana w tej książce to eksperymenty. W prezentowanych rozwiązaniach zadań niekiedy nie stawiam kropki nad i – nie podaję ich pełnych rozwiązań, uważam bowiem, że zamieszczone opisy eksperymentów stanowią znaczącą odpowiedź do teoretycznych rozważań. Technologiczne wspomaganie nauczania i uczenia się matematyki niesie w sobie pewne niebezpieczeństwo, studenci, a zwłaszcza uczniowie często myślą, że sprawdzenie wielu przypadków jest rozwiązaniem. Tak jest, ale tylko wtedy, gdy mamy pewność, że zbiór potencjalnych rozwiązań, np. jakiegoś równania, jest skończony. Najczęściej eksperymenty numeryczne to początek drogi i należy to uzmysławiać wszystkim, którzy używają programów typu Mathematica.

W książce pojawiają się definicje i twierdzenia, ale poza komentarzami i eksperymentami numerycznymi nie ma dowodów tych twierdzeń, gdyż bardzo wiele z nich znajduje się w podręczniku [ETL2]. Poza tym zdecydowana większość twierdzeń z tej książki to klasyka teorii liczb. Ich dowody można znaleźć praktycznie w każdym podręczniku z tej dziedziny matematyki.

Zachęcam do eksperymentów numerycznych, komendy i procedury Mathematica są dość intuicyjne, ich poznawanie powinno być podporządkowane potrzebom związanym ze zrozumieniem pojawiających się twierdzeń i rozwiązywanych zadań. Podręcznik nie służy do nauki programu Mathematica. Mam nadzieję, że czytelnik odczuje radość, podobną do mojej w czasie pisania tej książki, gdy okazywało się, że przeprowadzane eksperymenty pozwoliły mi odkryć na nowo, zrozumieć wiele zagadnień teorii liczb.

Chciałbym wyrazić wdzięczność Panu Krzysztofowi Kowitzowi za uważne przeczytanie manuskryptu i szereg cennych uwag na temat jego zawartości.

Piotr Zarzycki